ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d' ADMISSION 1978

EPREUVES ECRITES d' ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 Heures)

L'USAGE DES TABLES NUMERIQUES ET DES REGLES A CALCUL EST AUTORISE.

L'EMPLOI DE CALCULATRICE ELECTRONIQUE EST FORMELLEMENT INTERDIT.

- *Chaque candidat doit traiter les deux problèmes de l'épreuve. Ces deux problèmes sont indépendants.*

PREMIER PROBLEME

Dans ce problème, λ désigne un nombre réel strictement positif.

I - 1°/ Donner l'ensemble de définition de la fonction réelle z de la variable réelle v :

$$z(v) = \text{Log } v - \frac{1}{2v-1}$$

Etudier les variations et tracer la courbe représentative de cette fonction.

2°/ Pour x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose :

$$Y_\lambda(x) = \text{Log } (\lambda \cos x) - \frac{1}{2 \cos 2x} + \frac{1}{2}$$

a) Indiquer, suivant les valeurs de λ, le nombre de racines, situées entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de l'équation

$$Y_\lambda(x) = 0$$

b) Donner le signe de $Y_\lambda(x)$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3°/ Dans cette question, on cherche une valeur approchée de la racine α, comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, de l'équation $Y_1(x) = 0$.

Pour cela, calculer $1 + z\left(\frac{1}{10}\right)$ et $1 + z\left(\frac{11}{100}\right)$.

En déduire la valeur de α à $\frac{2}{100}$ près.

II - Dans cette partie, on considère les fonctions f_λ, de la variable réelle x, définies par :

$$\begin{cases} f_\lambda(x) = \sin 2x \,.\, \text{Log } (\lambda|\cos x|) \text{ si } x \text{ n'est pas congru à } \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi. \\ f_\lambda(x) = 0 \text{ si } x \text{ est congru à } \frac{\pi}{2} \text{ modulo } \pi. \end{cases}$$

Etant donné un repère d'axes orthonormés (Ox, Oy), on appelle C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans ce repère.

1°/ a) Montrer que f_λ est continue sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

b) Soit G_0 l'ensemble des points M du plan vérifiant la condition suivante :

"il existe une courbe C_λ admettant en M une tangente parallèle à Ox".

Donner l'équation de l'ensemble G_0 et le représenter.

c) Même question pour l'ensemble G_1 correspondant aux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -x$.

2°/ Etudier les variations de f_λ (on pourra utiliser les résultats de la première partie).

3°/ a) Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f_λ

b) Préciser les tangentes à C_λ aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$.

4°/ Représenter, sur le même graphique, en prenant 10 cm pour unité :

a) les parties de G_0, G_1 et C_1 correspondant aux valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

b) les parties des courbes C_λ, pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 2$, correspondant aux valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

.../...

DEUXIEME PROBLEME

Dans ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier n positif ou nul, on désigne par $\mathcal{T}_{n+1}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

I - On considère l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, qui, à tout polynôme P, fait correspondre le polynôme ΔP défini par

$$\Delta P(X) = P(X + 1) - P(X)$$

1°/ a) Montrer que Δ est linéaire

b) Quel est le noyau de Δ ?

c) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Quelle est l'image par Δ de $\mathcal{T}_{n+1}$?

2°/ Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$

Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \Delta P = R \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

Que peut-on dire du degré de P par rapport à celui de R ?

II - On définit une suite $(H_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier n appartenant à } \mathbb{N}, \text{ on a : } \begin{cases} \Delta H_{n+1} = H_n \\ H_{n+1}(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1°/ a) Expliquer pourquoi ces conditions déterminent bien une suite $(H_n)_{n \geq 0}$

- Quel est le degré de H_n ?

- Quel est le coefficient du terme de plus haut degré de H_n ?

b) Montrer que la famille de polynômes

$\{H_n \ ; \ n \geq 0\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2°/ n étant un entier strictement positif, on désigne par Δ^n l'application : $\underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \ldots\ldots\ldots\ldots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$

Par convention Δ^0 désigne l'identité dans $\mathbb{R}[X]$

Soit p un élément de $\mathbb{N}$, et Q un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré p.

Montrer que la décomposition de Q dans la base $\{H_n \ ; \ n \geq 0\}$ s'écrit :

$$Q = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n Q)(0) \cdot H_n$$

3°/ n et p étant des éléments de $\mathbb{N}$ tels que $1 + p \leq n$, montrer que $H_n(p) = 0$.

En déduire l'expression de H_n sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

III - 1°/ Soient P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ et vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \Delta P = Q \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n+1) = \sum_{m=0}^{n} Q(m)$

2°/ Soit P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, et n appartenant à $\mathbb{N}$.

Exprimer $(\Delta^n P)(X)$ en fonction de

$P(X)$, $P(X+1)$, ..., $P(X + n)$

3°/ Soit P appartenant à $\mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence des 2 propositions suivantes :

(i) $r \in \mathbb{Z} \Longrightarrow P(r) \in \mathbb{Z}$

(ii) les coordonnées de P dans la base $\{H_n \ ; \ n \geq 0\}$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail